

УДК 517.3

М. А. Максимова, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА СИСТЕМЕ ТЕЛ И ЭКРАНОВ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Цель работы: численное решение векторной задачи рассеяния электромагнитной волны препятствием сложной формы, состоящим из неоднородных тел и бесконечно тонких абсолютно проводящих экранов.

Материалы и методы. Задача рассматривается в квазиклассической постановке (решение разыскивается в классическом смысле всюду, за исключением края экранов). Исходная краевая задача для системы уравнений Максвелла сводится методами теории потенциала к системе интегродифференциальных уравнений по областям и поверхностям рассеивателей. Для приближенного решения системы уравнений применяется метод Галеркина с выбором кусочно-линейных финитных базисных функций.

Результаты. Сформулирована квазиклассическая постановка задачи дифракции на системе рассеивателей различной размерности; краевая задача сведена к системе интегродифференциальных уравнений, описан проекционный метод решения этой системы, построены финитные базисные функции, получены расчетные формулы матричных элементов согласно методу Галеркина, получены численные результаты задачи дифракции для тел и экранов различной формы.

Выводы. Предложенный метод исследования позволяет получить численные решения векторной задачи электромагнитной задачи дифракции на препятствиях различной размерности и может быть распространен на случай анизотропных рассеивателей и неплоских экранов.

Ключевые слова: векторная задача дифракции, интегродифференциальные уравнения, метод Галеркина, финитные базисные функции.

M. A. Maksimova, M. Yu. Medvedik, Yu. G. Smirnov, A. A. Tsupak

NUMERICAL SOLUTION OF THE ELECTROMAGNETIC WAVE DIFFRACTION PROBLEM ON THE SYTEM OF BODIES AND SCREENS

Abstract.

Background. The aim of this work is numerical solving of the vector problem of electromagnetic wave scattering on obstacles of complex shape, consisting of inhomogeneous bodies and infinitely thin absolutely conducting screens.

Material and methods. Using the methods of the potential theory, the original boundary value problem for Maxwell's equations is reduced to a system of integro-differential equations in the regions and the surfaces of the scatterer. To obtain an approximate solution to the system the authors suggest the Galerkin method with piecewise linear finite basis functions.

Results: The quasiclassical statement of the diffraction problem by a system of obstacles of various dimensions is proposed; the boundary value problem is reduced

¹ Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект №14-11-00344

to a system of integro-differential equations; the projection method for solving this system is formulated, the piecewise linear basis functions with compact support are introduced; formulas of matrix elements are obtained according to the Galerkin method; numerical results for the diffraction problem on inhomogeneous bodies and piecewise flat screens are obtained.

Conclusions. The proposed method allows to find numerical solutions to the vector problem of electromagnetic diffraction by obstacles of various dimensions. This method can be extended to the case of anisotropic volume scatterers and non-planar screens.

Key words: vector diffraction problem, integro-differential equations, Galerkin method, finite basis functions.

Введение

В данной работе описан численный метод решения векторной задачи дифракции на системе рассеивателей различной размерности. Анализ классических задач дифракции посвящено большое число работ зарубежных [1–7] и отечественных [8–10] исследователей, в том числе и авторов данной статьи [11–17]. Задача рассеяния акустических волн на системе тел и экранов представлена в статье [17]. Главным отличием рассматриваемой задачи является не только наличие одновременно и объемных, и бесконечно тонких рассеивателей, но и ее векторный характер. Для численного решения такой задачи предлагается применить метод Галеркина. Особенно важным при реализации численного метода является выбор базисных функций, которые обязаны удовлетворять условию аппроксимации в достаточно широких пространствах. В качестве таких функций предлагается выбрать финитные кусочно-линейные по одной из переменных функции.

В статье приведены постановка задачи, вывод системы интегральных уравнений, описание дискретизации задачи и базисных функций, расчетные формулы для матричных элементов согласно методу Галеркина и результаты расчетов для рассеивателей различной формы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ задачу дифракции электромагнитных волн на системе непересекающихся тел Q_i и экранов Ω_j ($i=1, \dots, I$; $j=1, \dots, J$) (рис. 1).

Пусть

$$\Omega = \bigcup_j \Omega_j, \quad \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset \quad (i \neq j) -$$

объединение конечного числа связных ориентируемых незамкнутых и непересекающихся ограниченных поверхностей класса C^∞ в $\mathbb{R}^3$. Край $\partial\Omega_j := \bar{\Omega}_j \setminus \Omega_j$ поверхности Ω_j есть кусочно-гладкая кривая, состоящая из конечного числа простых дуг класса C^∞ без точек самопересечения, сходящихся под углами, отличных от нулевого; $\partial\Omega := \bigcup_j \partial\Omega_j$. Предполагаем,

что экраны являются идеально проводящими.

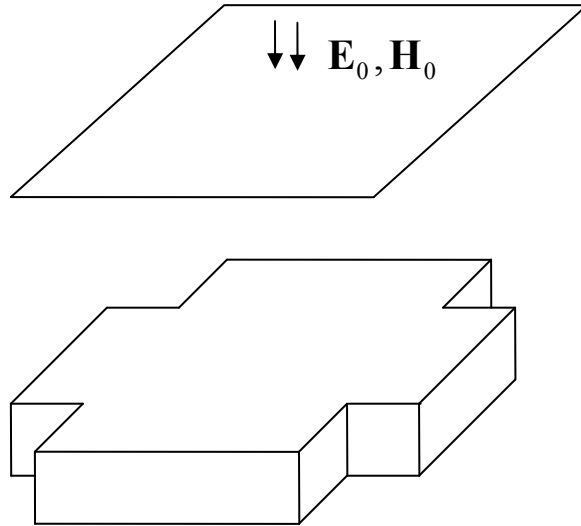


Рис. 1

Определим также трубчатые окрестности $\partial\Omega_\delta$ края экрана:

$$\partial\Omega_\delta := \{x \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

Предполагаем, что Q_i – ограниченные области, границы которых $\partial Q_i = \overline{Q}_i \setminus Q_i$ – кусочно-гладкие замкнутые ориентируемые поверхности, состоящие из конечного числа поверхностей класса C^1 . Определим $Q := \bigcup_i Q_i$. Предполагаем, что $\overline{Q} \cap \overline{\Omega} = \emptyset$. Рассматриваемые тела могут быть диэлектрически неоднородными и анизотропными – неоднородность задачи описывается тензор-функцией

$$\hat{\varepsilon}(x) = \begin{cases} \varepsilon_0 \hat{I}, & x \in (\overline{Q} \cup \overline{\Omega})^c, \\ \hat{\varepsilon}_i(x), & x \in \overline{Q}_i, \end{cases}$$

причем комплексные тензоры $\hat{\varepsilon}_i(x)$ симметричны, а их мнимые части – симметрические положительно определенные тензоры:

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{\varepsilon}_i^T, \text{Im } \hat{\varepsilon}_i > 0.$$

Здесь и всюду ниже $M^c := \mathbb{R}^3 \setminus M$; свободное пространство однородно и изотропно с постоянными ε_0, μ_0 , причем выполняются условия $\text{Im } \varepsilon_0 \geq 0$, $\text{Im } \mu_0 \geq 0$, $\text{Im } k_0 \geq 0$, $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$.

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ с гармонической зависимостью от времени вида $e^{-i\omega t}$ на системе тел и

экранов. Источником поля может быть, например, ток $\mathbf{j}_{0,E}$, локализованный вне рассеивателей: $\text{supp}(\mathbf{j}_{0,E}) \cap (\overline{\Omega} \cup \overline{Q}) = \emptyset$. Ниже P^+ , P^- – произвольные области, внешняя и внутренняя соответственно к Ω и такие, что $\Omega \subset \partial P^\pm$.

Требуется определить полное электромагнитное поле $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in C^2((\partial Q \cup \overline{\Omega})^c) \cap C^1(\overline{Q^c \setminus \Omega}) \cap \bigcap_{\delta > 0} C^1(\overline{Q}) \cap C(\overline{P^+} \setminus \partial \Omega_\delta) \cap C(\overline{P^-} \setminus \partial \Omega_\delta), \quad (1)$$

удовлетворяющее уравнениям Максвелла;

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H} = -i\omega \hat{\epsilon} \mathbf{E} + \mathbf{j}_{0,E}, \\ \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H} \end{cases} \quad (2)$$

в $(\partial Q \cup \overline{\Omega})^c$; условиям непрерывности касательных компонент на границе области неоднородности:

$$[\mathbf{E}_\tau]_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau]_{\partial Q} = 0; \quad (3)$$

краевым условиям на поверхности экрана Ω (за исключением точек края экрана):

$$\mathbf{E}_\tau|_\Omega = 0; \quad (4)$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3) = H_{loc}^0(\mathbb{R}^3) \quad (5)$$

и условиям излучения Зоммерфельда на бесконечности для рассеянного поля:

$$\frac{\partial(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)}{\partial r} - ik_0(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s) = o(1/r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (6)$$

где $r = |x|, x \in \mathbb{R}^3$.

Определение 1. Решение $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ задачи (2)–(6), удовлетворяющее условиям (1), будем называть квазиклассическим.

2. Интегродифференциальные уравнения задачи дифракции

Выведем систему интегродифференциальных уравнений электрического поля сформулированной задачи дифракции.

Представим электрическое поле в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \quad (7)$$

где $\mathbf{E}_0$ – падающее поле; $\mathbf{E}_1$ – поле, рассеянное экраном Ω так, что $\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.

Поле $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$ есть решение краевой задачи:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_0 + \mathbf{j}_{0,E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_0 \end{cases} \quad (8)$$

с условиями сопряжения

$$[\mathbf{E}_{0,\tau}]_{\partial Q} = [\mathbf{H}_{0,\tau}]_{\partial Q} = 0. \quad (9)$$

Поле $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, рассеянное экраном, есть решение краевой задачи

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_1, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_1 \end{cases} \quad (10)$$

в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ с условиями излучения Зоммерфельда и граничными условиями:

$$[\mathbf{E}_{1,\tau}]_{\partial Q} = [\mathbf{H}_{1,\tau}]_{\partial Q} = 0, \quad (\mathbf{E}_{1,\tau} + \mathbf{E}_{0,\tau})_{\Omega} = 0. \quad (11)$$

Поле $\mathbf{E}_1$ будем искать в виде

$$\mathbf{E}_1(x) = \left(\operatorname{grad} \operatorname{div}_{\tau} + k_0^2 \right) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y, \quad (12)$$

где $G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{\exp(ik_0|x-y|)}{|x-y|}$, $\operatorname{div}_{\tau}$ – операция поверхностной дивергенции

[11]; $\mathbf{u}$ – неизвестная поверхностная плотность тока на Ω , представляющая собой касательное векторное поле: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ на Ω , $\mathbf{v}$ – единичный вектор нормали к Ω .

Рассмотрим «новое» падающее $(\mathbf{E}'_0, \mathbf{H}'_0) = (\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0) + (\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ и перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{j}_E, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H}; \end{cases} \quad (13)$$

ток $\mathbf{j}_E$ имеет вид

$$\mathbf{j}_E = \mathbf{j}'_{0,E} + \mathbf{j}_{p,E},$$

где $\mathbf{j}'_{0,E}$ – токи, отвечающие полю $(\mathbf{E}'_0, \mathbf{H}'_0)$; $\mathbf{j}_{p,E}$ – ток поляризации в области Q :

$$\mathbf{j}_{p,E} = -i\omega(\hat{\epsilon}(x) - \epsilon_0 \hat{I}) \mathbf{E}.$$

Поле $\mathbf{E}$ представим в Q через векторный потенциал

$$\mathbf{A}_E(x) = \int_Q G(x, y) \mathbf{j}_E(y) dy \quad (14)$$

по известным формулам [9]:

$$\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{A}_E - \frac{1}{i\omega\epsilon_0}\text{grad div}\mathbf{A}_E. \quad (15)$$

Из определения полей $\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1$ и равенств (7), (13)–(15) получим интегродифференциальное уравнение электрического поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) - \left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_Q G(x, y) \left[\frac{\hat{\mathbf{e}}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy - \\ - \left(k_0^2 + \text{grad div}_\tau\right) \int_Q G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \end{aligned} \quad (16)$$

Следующее равенство дает представление поля вне тела и экрана:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = \left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_Q G(x, y) \left[\frac{\hat{\mathbf{e}}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy + \\ + \left(k_0^2 + \text{grad div}_\tau\right) \int_Q G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y + \mathbf{E}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus (\bar{Q} \cup \bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Для получения второго уравнения перейдем в (17) к пределу при $x \rightarrow \Omega$, взяв касательные компоненты всех членов уравнения:

$$\begin{aligned} \left(- \left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_Q G(x, y) \left[\frac{\hat{\mathbf{e}}(y)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E}(y) dy - \right. \\ \left. - \left(k_0^2 + \text{grad div}_\tau\right) \int_Q G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \right)_\tau = \mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (18)$$

Введем замену $\left[\frac{\hat{\mathbf{e}}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right] \mathbf{E} = \mathbf{J}$, $\left[\frac{\hat{\mathbf{e}}(x)}{\epsilon_0} - \hat{I} \right]^{-1} = \hat{\xi}$ и перепишем систему уравнений (16), (18) в токах, умножив для симметрии второе уравнение системы на минус единицу:

$$\begin{aligned} \hat{\xi} \mathbf{J} - \left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \\ - \left(k_0^2 + \text{grad div}_\tau\right) \int_\Omega G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q; \\ \left(- \left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy - \right. \end{aligned}$$

$$-\left(k_0^2 + \text{grad div}_\tau\right) \int_{\Omega} G(x, y) \mathbf{u}(y) ds_y \bigg|_\tau = -\mathbf{E}_{0,\tau}(x), \quad x \in \Omega. \quad (19)$$

Таким образом, получена система интегродифференциальных уравнений задачи дифракции на системе объемных тел и тонких экранов. Ниже описан численный метод решения этой системы уравнений.

3. Дискретизация задачи

Для решения задачи методом Галеркина построим равномерную расчетную сетку на системе тел и экранов. Пусть рассматриваемая система состоит из плоского экрана Ω , имеющего прямоугольную форму, и тела Q , являющегося прямоугольным параллелепипедом. Разобьем экран и тело на элементарные ячейки – конечные элементы. Для плоского экрана конечные элементы представляют собой прямоугольники, а для тела – прямоугольные параллелепипеды (рис. 2). Для удобства введем двухиндексную нумерацию на экране $i = (i_1, i_2)$ и трехиндексную на теле: $j = (j_1, j_2, j_3)$. Элементарные ячейки на экране определяются следующим образом:

$$P_{i_1, i_2} = \{x = (x_1, x_2), i_k h_k < x_k < (i_k + 1) h_k, k = 1, 2\},$$

где $i_k = 0, \dots, n-1$. Элементарные ячейки на теле определяются аналогично:

$$P_{j_1, j_2, j_3} = \{x = (x_1, x_2, x_3), j_k h_k < x_k < (j_k + 1) h_k, k = 1, 2, 3\},$$

где $j_k = 0, \dots, n-1$.

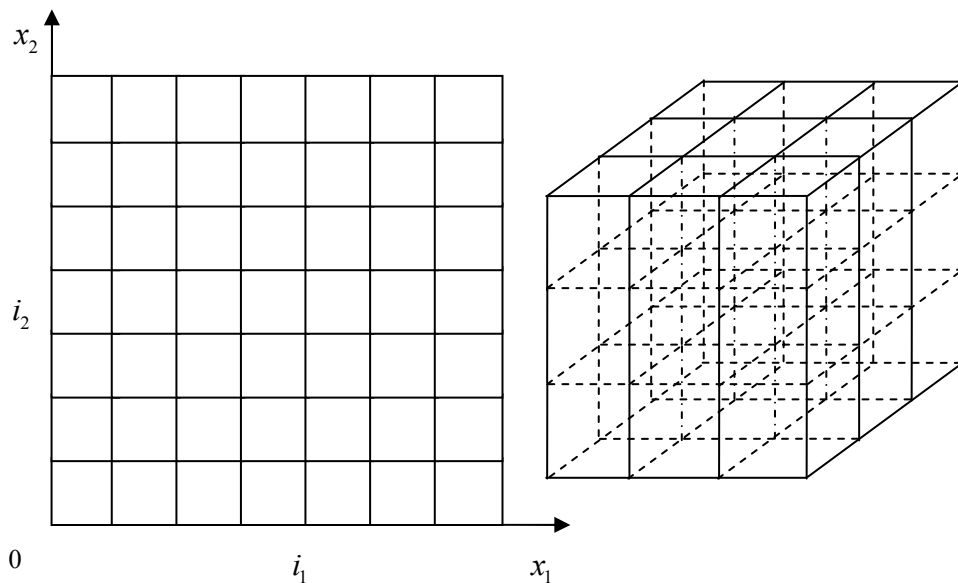


Рис. 2

Определим сеточные базисные функции на экране и теле. На экране введем функции *roof*_{for}, а на теле – функции *крышки*. Для этого зададим но-

сители базисных функций как пары соседних элементарных ячеек, принадлежащих экрану или телу, и расположенных вдоль одной из координатных осей (рис. 3).

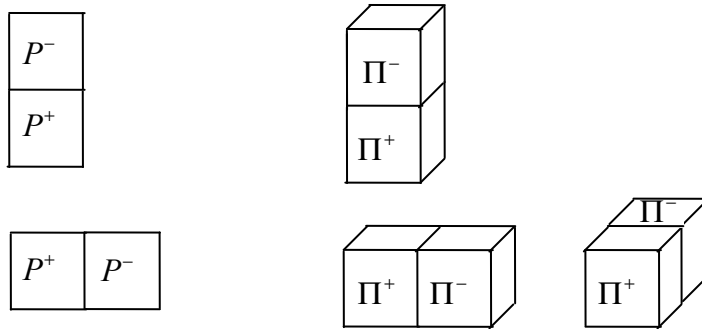


Рис. 3

Общее количество носителей составляет $N = N_1 + N_2$, где $N_1 = 2(n-1)n$ – количество носителей на экране Ω , а $N_2 = 3(n-1)n^2$ – количество носителей на теле Q .

Определим базисные функции на экране по методу, предложенному в статье [7]. Данная функция $\phi_i(x_1, x_2, x_3)$, отвечающая ребру i , определяется по правилу

$$\phi_i(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_1 - x_{1,i-1}, x_2 - x_{2,i-1}, x_3 - x_{3,i-1}) \frac{l_i}{S_i^+} & \text{в } P_i^+, \\ (x_{1,i+1} - x_1, x_{2,i+1} - x_2, x_{3,i+1} - x_3) \frac{l_i}{S_i^-} & \text{в } P_i^-, \end{cases} \quad (20)$$

где l_i является длиной ребра i ; S^+ и S^- есть площади P^+ и P^- соответственно.

На теле введем базисные функции крышки [12], пусть $h^1 := |x_{1,k} - x_{1,k-1}|$, тогда получим формулы для ψ_{klm}^1 :

$$\psi_{klm}^1(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{h^1} |x_1 - x_{1,k}|, & x \in \bar{\Pi}_{klm}^1, \\ 0, & x \notin \bar{\Pi}_{klm}^1. \end{cases} \quad (21)$$

Функции $\psi_{klm}^2, \psi_{klm}^3$, существенно зависящие от переменных x_2 и x_3 соответственно, определяются аналогичными соотношениями.

Перепишем систему интегродифференциальных уравнений в операторном виде:

$$L(\mathbf{J}, \mathbf{u}) = \mathbf{f}, \quad (22)$$

здесь

$$L = \begin{pmatrix} L^{11} & L^{12} \\ L^{21} & L^{22} \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 \\ -\mathbf{E}_{0,\tau} \end{pmatrix};$$

операторы L^{ij} определяются согласно системе (19); всюду ниже в определении операторов второго уравнения опускается знак вычисления касательных компонент векторов:

$$L^{11}\mathbf{J}(x) = \bar{\xi}\mathbf{J} - \left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy;$$

$$L^{12}\mathbf{u}(x) = -\left(k_0^2 + \text{grad div}_\tau\right) \int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y;$$

$$L^{21}\mathbf{J}(x) = -\left(k_0^2 + \text{grad div}\right) \int_Q G(x,y)\mathbf{J}(y)dy \Big|_\tau;$$

$$L^{22}\mathbf{u}(x) = -\left(k_0^2 + \text{grad div}_\tau\right) \int_\Omega G(x,y)\mathbf{u}(y)ds_y \Big|_\tau.$$

Применяя метод Галеркина к системе (22), приходим к решению матричного уравнения

$$[\mathbf{L}][\mathbf{u}] = [\mathbf{f}].$$

Здесь $[\mathbf{u}]$ – столбец неизвестных коэффициентов при базисных функциях, $[\mathbf{L}]$ – основная матрица СЛАУ, $[\mathbf{f}]$ – столбец правой части.

Основная матрица имеет блочный вид

$$[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{L}^{11}] & [\mathbf{L}^{12}] \\ [\mathbf{L}^{21}] & [\mathbf{L}^{22}] \end{bmatrix}.$$

Блоки матрицы, расположенные по главной диагонали, соответствуют решению задачи дифракции только на теле и только на экране.

Элементы матрицы, соответствующие решению задачи на теле, получаются путем вычисления трех- и шестикратных интегралов

$$[\mathbf{L}_{ij}^{11}] = \int_Q \bar{\xi}(x)\Psi_j(x)\Psi_i(x)dx - \int_Q \left(k_0^2 + \text{grad}_x \text{div}_x\right) \int_Q G(x,y)\Psi_j(y)d\mathbf{y}\Psi_i(x)dx.$$

Элементы матрицы, соответствующие решению задачи на экране, получаются путем вычисления четырехкратных интегралов

$$[\mathbf{L}_{ij}^{22}] = -\int_\Omega \left(k_0^2 + \text{grad}_x \text{div}_{\tau,x}\right) \int_\Omega G(x,y)\Phi_j(y)ds_y \Big|_\tau \Phi_i(x)ds_x.$$

Блоки $[\mathbf{L}_{ij}^{12}]$ и $[\mathbf{L}_{ij}^{21}]$ матрицы отвечают за взаимодействие полей на теле и экране; элементы матрицы в данных блоках получаются путем вычисления пятикратных интегралов по объему и поверхности

$$[\mathbf{L}_{ij}^{12}] = -[\mathbf{A}_{ij}^{12}] - [\mathbf{B}_{ij}^{12}] = - \int_Q \left(k_0^2 + \text{grad}_x \text{div}_{\tau,x} \right) \int_{\Omega} G(x, y) \boldsymbol{\varphi}_j(y) ds_y \boldsymbol{\psi}_i(x) dx,$$

$$[\mathbf{L}_{ij}^{21}] = -[\mathbf{A}_{ij}^{21}] - [\mathbf{B}_{ij}^{21}] = - \int_{\Omega} \left(k_0^2 + \text{grad}_x \text{div}_x \right) \int_Q G(x, y) \boldsymbol{\psi}_j(y) dx \boldsymbol{\varphi}_i(x) ds_y.$$

Элементы правой части $[\mathbf{f}] = [\mathbf{f}^1, \mathbf{f}^2]^T$ матричного уравнения задаются формулами

$$[\mathbf{f}_i^1] = \int_Q \mathbf{E}_0(x) \boldsymbol{\psi}_i(x) dx, \quad [\mathbf{f}_i^2] = - \int_Q \mathbf{E}_{0,\tau}(x) \boldsymbol{\varphi}_i(x) ds_x.$$

В блоках $[\mathbf{L}^{11}]$ и $[\mathbf{L}^{22}]$ интегралы являются слабосингулярными в случаях непустого пересечения носителей базисных функций; процедура избавления от особенности изложена в [15, 16]. Остальные элементы матрицы $[\mathbf{L}]$ выражаются через собственные интегралы Римана.

Покажем, что блоки на побочной диагонали матрицы являются транспонированными по отношению друг к другу, т.е.

$$[\mathbf{L}_{ij}^{12}] = [\mathbf{L}_{ji}^{21}].$$

Преобразуем выражения для матричных элементов, содержащие операции grad div , используя возможность внесения производных любого порядка под знак интеграла. Так как в рассматриваемой задаче экран Ω является плоским и перпендикулярным оси x_3 , то при вычислении касательных компонент векторов следует учитывать только их первые и вторые координаты. То же верно и при вычислении операций касательного градиента и дивергенции:

$$\text{grad}'_x f := \text{grad}_{\tau,x} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, 0 \right), \quad \text{div}_{\tau,x} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}.$$

Применяя формулу интегрирования по частям и учитывая свойства базисных функций, получим

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_{ij}^{12}] &= \int_Q \left(\text{grad}_x \text{div}_{\tau,x} \int_{\Omega} G(x, y) \boldsymbol{\varphi}_j(y) ds_y \right) \boldsymbol{\psi}_i(x) dx = \\ &= - \int_Q \left(\text{div}_{\tau,x} \int_{\Omega} G(x, y) \boldsymbol{\varphi}_j(y) ds_y \right) \text{div}_x \boldsymbol{\psi}_i(x) dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{Q \setminus \Omega} \left(\int_{\Omega} \text{grad}'_x G(x, y) \boldsymbol{\varphi}_j(y) ds_y \right) \text{div}_x \boldsymbol{\Psi}_i(x) dx = \\
 &= - \int_{Q \setminus \Omega} \int_{\Omega} \text{grad}'_x G(x, y) \boldsymbol{\varphi}_j(y) \text{div}_x \boldsymbol{\Psi}_i(x) ds_y dx.
 \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{B}_{ij}^{21}] &= \int_{\Omega} \left(\text{grad}_x \text{div}_x \int_{Q \setminus \Omega} G(x, y) \boldsymbol{\Psi}_j(y) dy \right) \boldsymbol{\varphi}_i(x) ds_x = \\
 &= \int_{\Omega} \left(\text{grad}_x \int_{Q \setminus \Omega} \text{grad}_x G(x, y) \boldsymbol{\Psi}_j(y) dy \right) \boldsymbol{\varphi}_i(x) ds_x = \\
 &= - \int_{\Omega} \left(\text{grad}'_x \int_{Q \setminus \Omega} \text{grad}_y G(x, y) \boldsymbol{\Psi}_j(y) dy \right) \boldsymbol{\varphi}_i(x) ds_x = \\
 &= \int_{\Omega} \left(\text{grad}'_x \int_{Q \setminus \Omega} G(x, y) \text{div}_y \boldsymbol{\Psi}_j(y) dy \right) \boldsymbol{\varphi}_i(x) ds_x = \\
 &= \int_{\Omega} \left(\int_{Q \setminus \Omega} \text{grad}'_x G(x, y) \text{div}_y \boldsymbol{\Psi}_j(y) dy \right) \boldsymbol{\varphi}_i(x) ds_x = \\
 &= \int_{Q \setminus \Omega} \int_{\Omega} \text{grad}'_x G(x, y) \text{div}_y \boldsymbol{\Psi}_j(y) \boldsymbol{\varphi}_i(x) ds_x dy = \\
 &= \int_{Q \setminus \Omega} \int_{\Omega} \text{grad}'_y G(y, x) \text{div}_x \boldsymbol{\Psi}_j(x) \boldsymbol{\varphi}_i(y) ds_y dx = \\
 &= - \int_{Q \setminus \Omega} \int_{\Omega} \text{grad}'_x G(x, y) \text{div}_x \boldsymbol{\Psi}_j(x) \boldsymbol{\varphi}_i(y) ds_y dx.
 \end{aligned}$$

Наконец, из очевидного равенства

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{A}_{ij}^{12}] &= \int_{Q \setminus \Omega} k_0^2 \int_{\Omega} G(x, y) \boldsymbol{\varphi}_j(y) ds_y \boldsymbol{\Psi}_i(x) dx = \\
 &= \int_{\Omega} k_0^2 \int_{Q \setminus \Omega} G(x, y) \boldsymbol{\Psi}_i(y) dx \boldsymbol{\varphi}_j(x) ds_y = [\mathbf{A}_{ji}^{21}]
 \end{aligned}$$

следует $[\mathbf{L}_{ij}^{12}] = [\mathbf{L}_{ji}^{21}]$.

4. Численное решение. Результаты расчетов

Ниже в графическом виде приведены результаты расчетов для тел и экранов различной формы. Во всех вычислительных экспериментах падающая волна распространяется по гармоническому закону и направлена вдоль оси Ox_3 , волновое число k_0 равно единице. Размер расчетной сетки по каждой оси равен 8.

Рассмотрим сначала систему, в которой экран имеет прямоугольную форму, а тело является прямоугольным параллелепипедом (рис. 4):

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in (-\lambda/2, \lambda/2); x_3 = 2\lambda\},$$

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i \in (-\lambda/2, \lambda/2)\}.$$

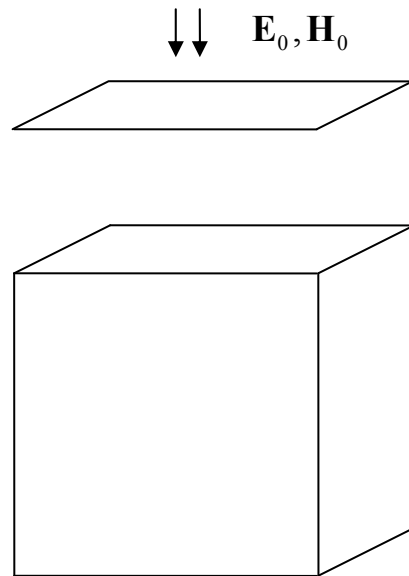


Рис. 4

Пусть диэлектрическая проницаемость тела постоянна и определяется параметром $\xi = 3\pi$. В этом случае результат решения задачи представлен на рис. 5, 6. Рисунок 5 иллюстрирует распространение модулей поверхностных токов на экране вдоль каждой из направляющих. Рисунок 6 иллюстрирует распространение поля внутри тела в слоях 1, 3, 5 и 8 расчетной сетки, расположенных перпендикулярно оси Ox_3 .

Рассмотрим систему, аналогичную приведенной на рис. 4, т.е. размеры экрана и тела определяются соотношениями

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_i \in (-\lambda/2, \lambda/2)\} \text{ и } \Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in (-\lambda/2, \lambda/2); x_3 = 2\lambda\}.$$

Пусть в центре тела Q имеется кубическое отверстие размера $\frac{\lambda}{4}$ (рис. 7).

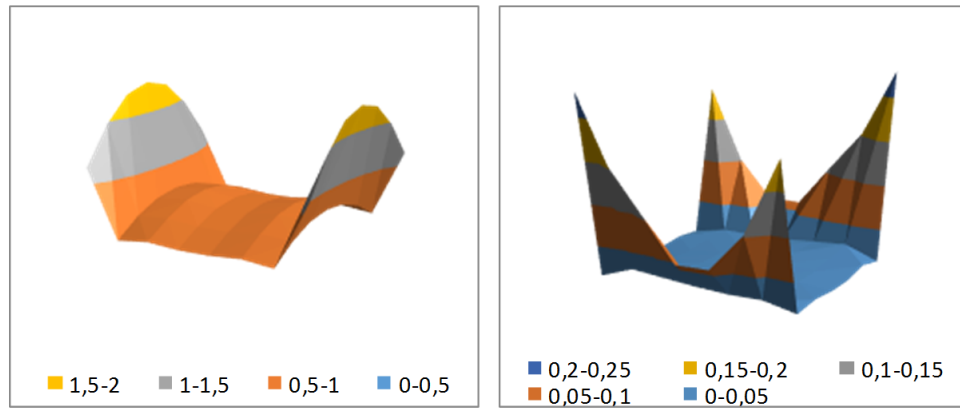


Рис. 5

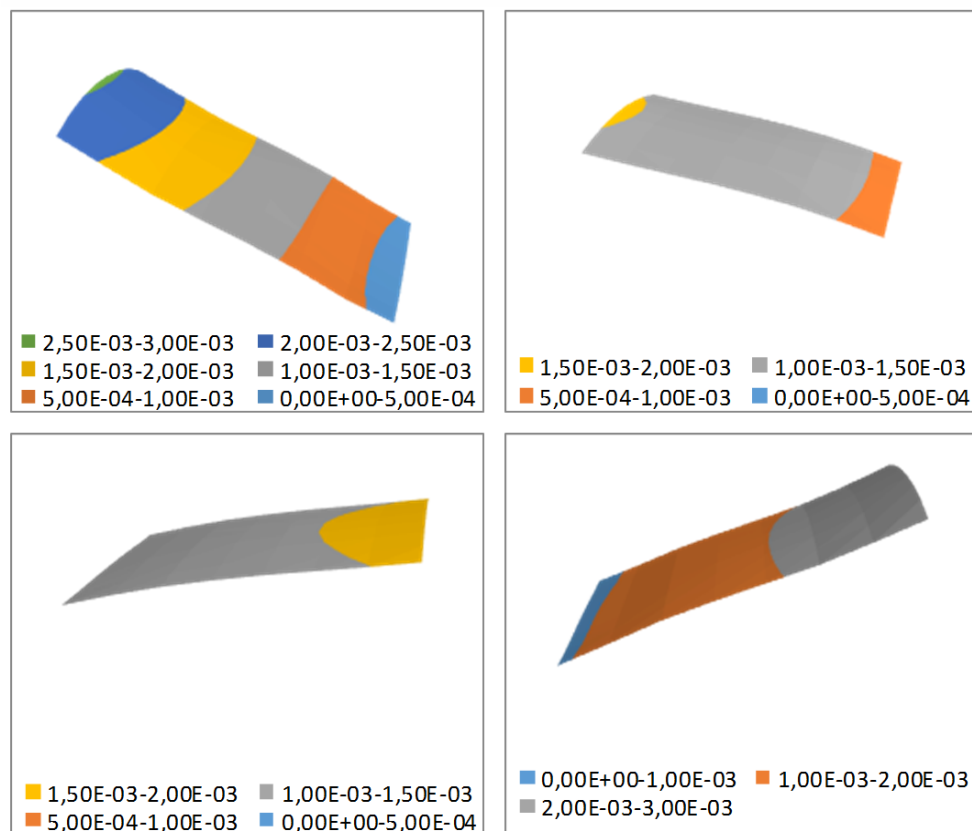


Рис. 6

Проницаемость тела постоянна и определяется параметром $\xi = 3\pi$. В этом случае результат решения задачи представлен на рис. 8, 9. Рисунок 8 иллюстрирует распространение модулей поверхностных токов на экране вдоль каждой из направляющих. Рисунок 9 иллюстрирует распространение поля внутри тела в слоях 1, 3, 5 и 8 расчетной сетки, расположенных перпендикулярно оси Ox_3 .

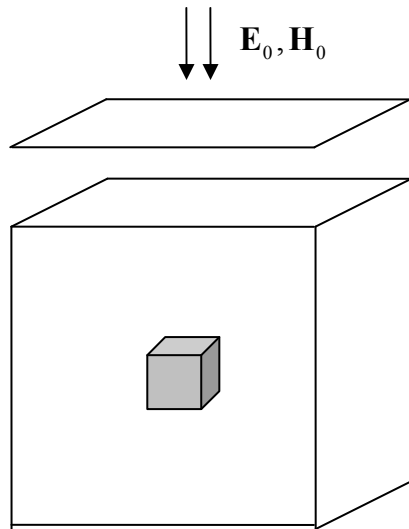


Рис. 7

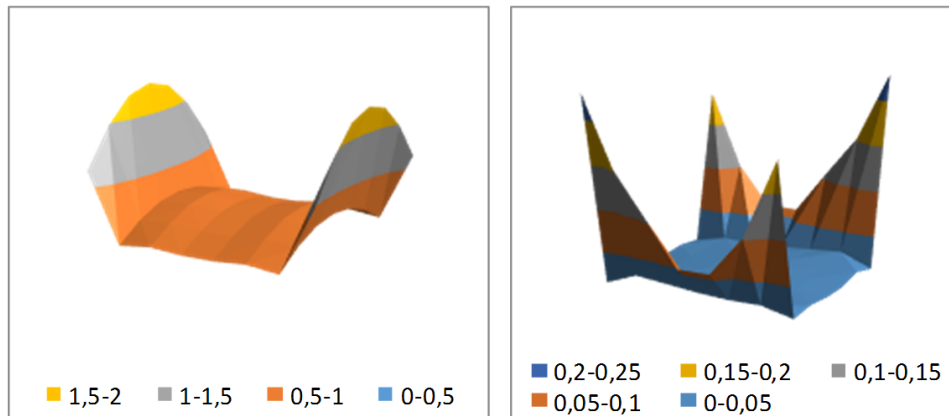


Рис. 8

Рассмотрим теперь систему рассеивателей, состоящую из цилиндрического экрана и неоднородного тела, изображенную на рис. 10. Размеры экрана и тела определяются соотношениями

$$Q = \left\{ x : x_i \in \left(-\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{4} \right), i = 1, 2, 3 \right\}, \quad \Omega = \{ x : \max(x_1, x_2) = \lambda / 2, x_3 \in (-\lambda / 2, \lambda / 2) \}.$$

Диэлектрическая проницаемость тела определяется функцией

$$\xi(x_1) = \begin{cases} 3\pi; & x_1 < 0, \\ 9\pi; & x_1 \geq 0. \end{cases}$$

Рисунок 11 иллюстрирует распространение модулей поверхностных токов на экране вдоль каждой из направляющих на гранях цилиндра. Рисунки 12, 13 иллюстрируют распространение поля внутри тела в слоях 1, 3, 5 и 8 расчетной сетки, расположенных перпендикулярно оси Ox_3 .

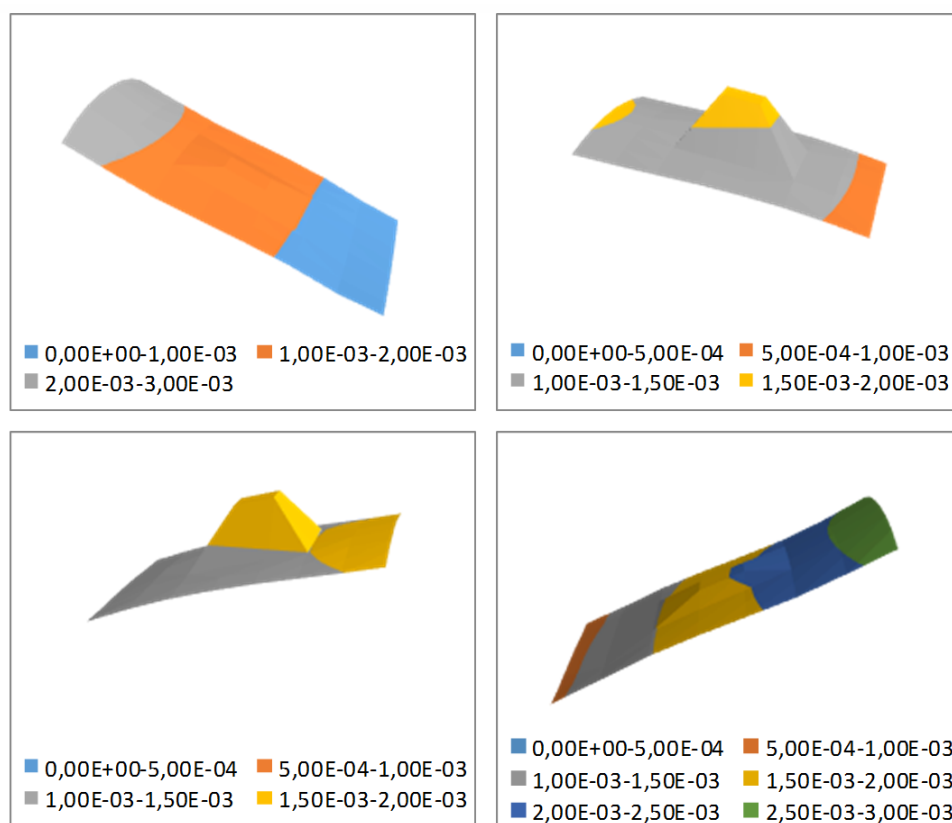


Рис. 9

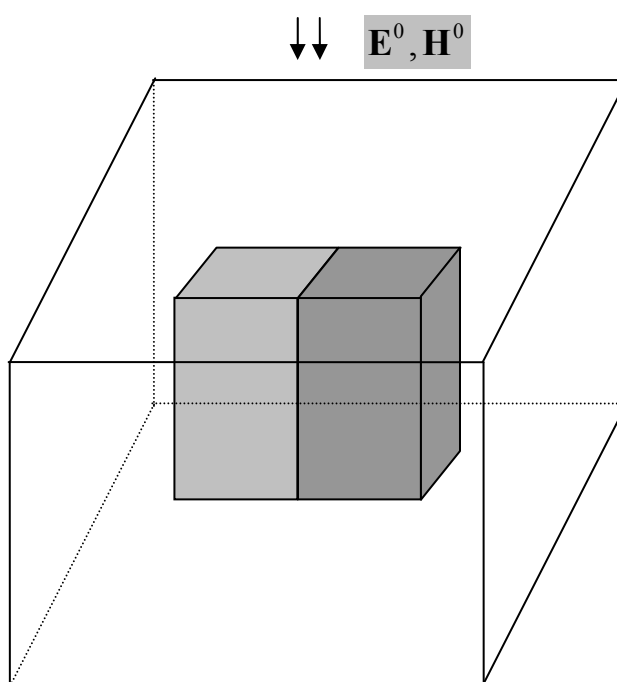


Рис. 10

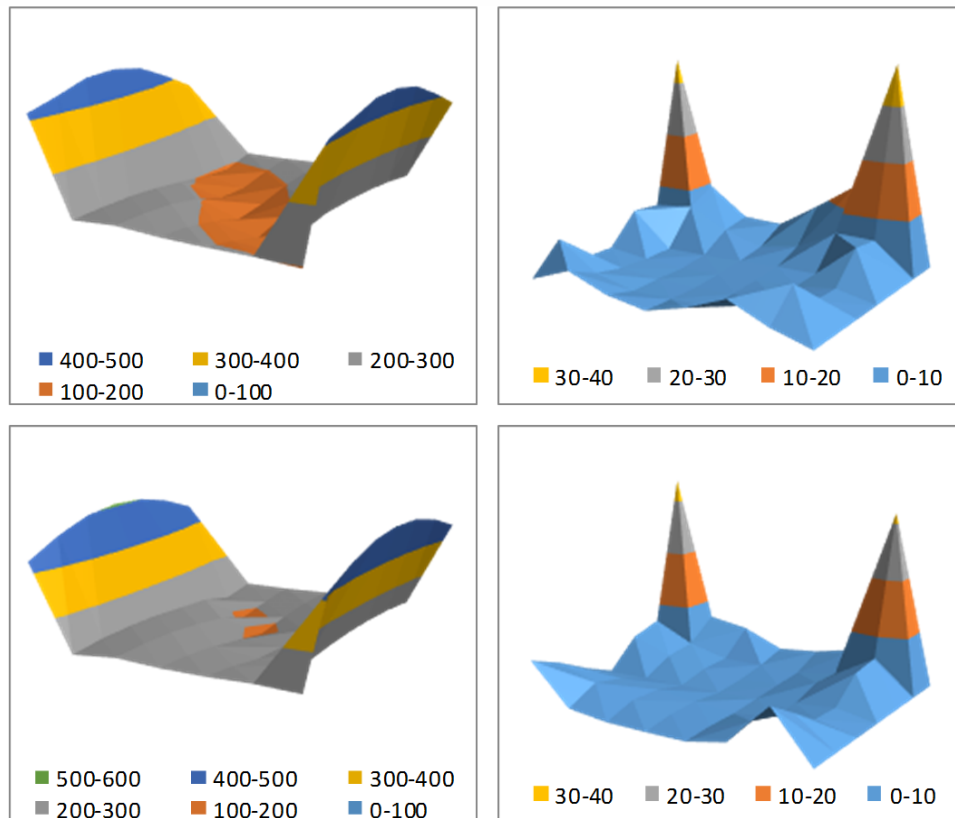


Рис. 11

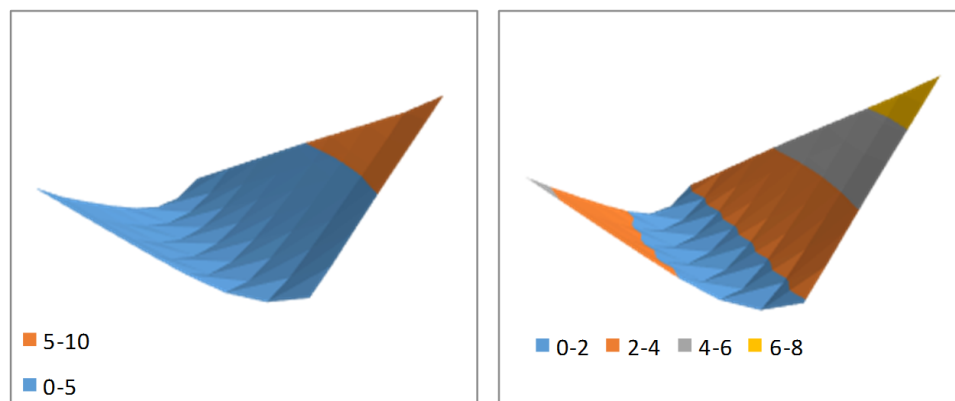


Рис. 12

Для решения задачи использовались суперкомпьютерные комплексы Московского государственного университета и Пензенского государственного университета.

Заключение

Рассмотрена квазиклассическая постановка задачи дифракции на системе рассеивателей различной размерности; краевая задача сведена к систе-

ме интегродифференциальных уравнений. Описан проекционный метод решения этой системы, построены финитные базисные функции, получены расчетные формулы матричных элементов согласно методу Галеркина. Получены численные результаты задачи дифракции для неоднородных тел и экранов сложной формы.

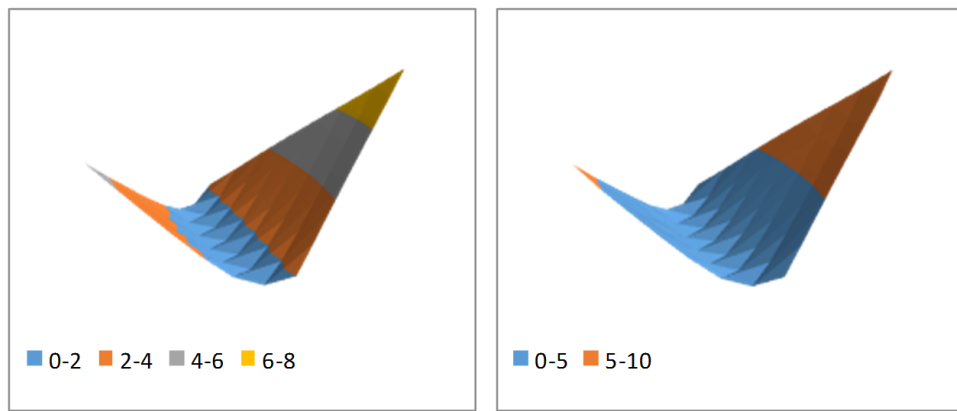


Рис. 13

Список литературы

1. **Колтон, Д.** Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – М. : Мир, 1987. – 312 с.
2. **Durand, M.** Layer potentials and boundary value problems for the Helmholtz equation in the complement of a thin obstacle / M. Durand // Math. Meth. Appl. – 1983. – Sci. 5. – P. 389–421.
3. **Costabel, M.** A direct boundary integral equation method for transmission problems / M. Costabel, E. Stephan // J. Math. Anal. Appl. – 1985. – V. 106.0. – P. 367–413.
4. **Turc, C.** Efficient Solution of Three-Dimensional Problems of Acoustic and Electromagnetic Scattering by Open Surfaces / C. Turc, A. Anand, O. Bruno, J. Chaubell // Proceedings of the Waves Conference (July 25–29, 2011). – URL: https://filer.case.edu/cct21/abstract_waves11_abct.pdf
5. **Stephan, E. P.** Boundary integral equations for screen problems in $\mathbb{R}^3$ / E. P. Stephan // Integral equations and potential theory. – 1987. – Vol. 10. – P. 236–257.
6. **Kirsch, A.** The operator equations of Lippmann-Schwinger type for acoustic and electromagnetic scattering problems in L_2 / A. Kirsch, A. Lechleiter // Appl. Anal. – 2010. – Vol. 88. – P. 807–830.
7. **Hänninen I.** Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions / I. Hänninen, M. Taskinen, and J. Sarvas // Prog. Electromagn. Res. PIER. – 2006. – Vol. 63. – P. 243–278.
8. **Ильинский, А. С.** Математические модели электродинамики / А. С. Ильинский, В. В. Кравцов, А. Г. Свешников. – М. : Высшая школа, 1991. – 224 с.
9. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и связь, 1998. – 160 с.
10. **Дмитриев, В. И.** Метод интегральных уравнений в вычислительной электродинамике / В. И. Дмитриев, Е. В. Захаров. – М. : МаксПресс, 2008. – 316 с.
11. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : Радиотехника, 1996. – 177 с.

12. **Смирнов, Ю. Г.** Существование и единственность решения объемного сингулярного интегрального уравнения в задаче дифракции / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 12. – С. 2264–2274.
13. **Смирнов, Ю. Г.** Исследование электромагнитной задачи дифракции на диэлектрическом теле методом объемного сингулярного интегрального уравнения / Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Дифференциальные уравнения. – 2005. – Т. 41, № 9. – С. 1190–1197.
14. **Смирнов, Ю. Г.** О сходимости методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и решении уравнения электрического поля / Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 133–143.
15. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2008. – № 4. – С. 441–446.
16. **Медведик, М. Ю.** Численное решение объемного сингулярного интегрального уравнения методом коллокаций / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 4 (16). – С. 54–69.
17. **Медведик, М. Ю.** Скалярная задача дифракции плоской волны на системе непересекающихся экранов и неоднородных тел / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2014. – Т. 54, № 8. – С. 1319–1331.

References

1. Kolton D., Kress R. *Metody integral'nykh uravneniy v teorii rasseyaniya* [Methods of integral equations in the scattering theory]. Moscow: Mir, 1987, 312 p.
2. Durand M. *Math. Meth. Appl.* 1983, sci. 5, pp. 389–421.
3. Costabel M., Stephan E. *J. Math. Anal. Appl.* 1985, vol. 106.0, pp. 367–413.
4. Turc C., Anand A., Bruno O., Chaubell J. *Proceedings of the Waves Conference (July 25–29, 2011)*. Available at: https://filer.case.edu/cct21/abstract_waves11_abct.pdf
5. Stephan E. P. *Integral equations and potential theory*. 1987, vol. 10, pp. 236–257.
6. Kirsch A., Lechleiter A. *Appl. Anal.* 2010, vol. 88, pp. 807–830.
7. Hänninen I., Taskinen M. and Sarvas J. *Prog. Electromagn. Res. PIER*. 2006, vol. 63, pp. 243–278.
8. Il'inskiy A. S., Kravtsov V. V., Sveshnikov A. G. *Matematicheskie modeli elektrodinamiki* [Mathematical models of electrodynamics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1991, 224 p.
9. Samokhin A. B. *Integral'nye uravneniya i iteratsionnye metody v elektromagnitnom rasseyanii* [Integral equations and iteration methods in electromagnetic scattering]. Moscow: Radio i svyaz', 1998, 160 p.
10. Dmitriev V. I., Zakharov E. V. *Metod integral'nykh uravneniy v vychislitel'noy elektrodinamike* [Method of integral equations in computer electrodynamics]. Moscow: Maks-Press, 2008, 316 p.
11. Il'inskiy A. S., Smirnov Yu. G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh* [Electromagnetic waves diffraction on conductive thin screens]. Moscow: Radiotekhnika, 1996, 177 p.
12. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2004, vol. 44, no. 12, pp. 2264–2274.

13. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2005, vol. 41, no. 9, pp. 1190–1197.
 14. Smirnov Yu. G. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2007, vol. 47, no. 1, pp. 133–143.
 15. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics]. 2008, no. 4, pp. 441–446.
 16. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2009, no. 4 (12), pp. 54–69.
 17. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of calculus mathematics and mathematical physics]. 2014, vol. 54, no. 8, pp. 1319–1331.
-

Максимова Марина Александровна
аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Maksimova Marina Aleksandrovna
Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street, Penza,
Russia)

Медведик Михаил Юрьевич
кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: _medv@mail.ru

Medvedik Mikhail Yur'evich
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Смирнов Юрий Геннадьевич
доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuriy Gennad'evich
Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Цупак Алексей Александрович
кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Tsupak Aleksey Aleksandrovich
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

УДК 517.3

Максимова, М. А.

Численное решение задачи дифракции электромагнитных волн на системе тел и экранов / М. А. Максимова, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, А. А. Цупак // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 3 (31). – С. 114–133.